数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 122-130

On locally two-distance sets

篠原雅史 (九州大学数理学府, COE 研究員)
shino@math.kyushu-u.ac.jp

1 序文

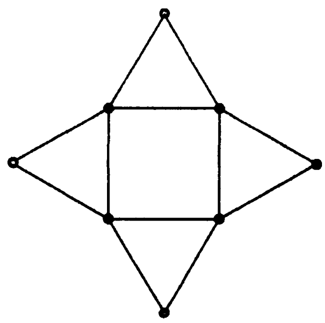
与えられた空間における有限個の点の配置として, どのようなものがよい配置であるかを考えることは. 組合せ論における研究テーマの一つである. 大雑把に言ってしまえば, 符号理論においては, 多くの点をできるだけ最小距離が大きくなるように配置することを目標としていて, デザイン理論においては少ない点で空間を近似することを目標としている. 同様に距離集合においては, 多くの点をできるだけでてくる距離 (相異なる二点間の距離) の種類を少なくなるように配置することを目標としている.

まず始めに, 距離集合 (distance set) に関する定義を与える.

$\mathbb{R}^d$ を d 次元ユークリッド空間とする. $\mathbb{R}^d$ 上の有限部分集合 X に対し $A(X)=\{PQ : P, Q\in X, P\neq Q\}$ とする. ここで, PQ は二点 P, Q 間のユークリッド距離を表す. X が k–distance set であるとは, $|A(X)|=k$ のとき, つまり X の相異なる二点間の距離がちょうど k 種類でてくるときをいう.

更に, $P\in X\subset\mathbb{R}^d$ に対し $(A(P)=)A_X(P)=\{PQ : Q\in X, P\neq Q\}$ とする. また $a(X)=\max\{|A_X(P)| : P\in X\}$ とする. X が locally k-distance set であるとは, $a(X)=k$ であるときをいう. (講演では, locally k-distance set の定義を, 任意の点 $P\in X$ に対して $|A_X(P)|\leq k$ のときとしていたが, 本稿では上の定義に従う.) 定義より明らかに, $|A(X)|\geq a(X)$ である. 特に, すべての k-distance set は locally k'-distance set ($^\exists k'\leq k$) となることがわかる. 逆に, locally k-distance set であって k'-distance set ($k'>k$) となる例もたくさんある. このような locally k-distance set を proper locally k-distance set とよぶ. 次に挙げる 8 点の配置 X_1 は, 4-distance set で locally 3–distance set になる例である. つまり proper な 3-distance set である.

本稿では, 主に $k=2$ に限定して話を進める. 本稿における最大のテーマは, 2-distance set と locally 2-distance set の差がどのくらいあるかということである. ある有限部分集合 X が 1-distance set となることと locally 1-distance set になることは同値であることに注意すれば, すべての 2-distance set は locally 2-distance set になる. 逆に, すべての locally 2-distance set は 2-distance set であるといえるだろうか?



X_1

次の Example 1, Example 2 で示すように proper locally 2-distance set は（無数に）存在する.

Example 1. 任意の次元 d に対して, $\mathbb{R}^d$ 上の locally 2-distance set で 3-distance set は (無数に) 存在する.

V_d を $\mathbb{R}^d$ 上の regular simplex の頂点集合全体, O を V_d の外接球の中心とする. $P \in V_d$ とし直線 PO 上の適当な点 Q を取ってくると, $V_d \cup \{Q\}$ は locally 2-distance set かつ 3-distance set であるようにできる.

locally 2-distance set なら （高々）k-distance set である, といえる k は存在するだろうか? 次の例で示すように, このような k に対するバウンドは存在しない.

Example 2. locally 2-distance set で k-distance set (k は任意) となる例.
($k = 5$ のとき)

$$X_2 = \{P_1^+, P_1^-, P_2^+, \dots, P_4^-\} \subset \mathbb{R}^7.$$

ここで, $P_1^\pm = (\pm 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P_2^\pm = (0, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, 0, 0,)$, $P_3^\pm = (0, 0, 0, \frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{8}}{3}, 0, 0)$, $P_4^\pm = (0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4})$ とする. このとき各二点間の距離は次のようになる.
$P_1^+P_1^- = 2$, $P_2^+P_2^- = \sqrt{3}$, $P_3^+P_3^- = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $P_4^+P_4^- = \frac{\sqrt{15}}{2}$, また $i \neq j$ のとき $P_i^\pm P_j^\pm = \sqrt{2}$.
よって X_2 は locally 2-distance set かつ 5-distance set となっている.

上の例は locally 2-distance set と 2-distance set の間には大きな差が存在することを示している. locally 2-distance set が 2-distance set となるのは当たり前ではないことを感じて頂けたのではないかと思う.

しかし, 上の例での頂点数は, 次元とほぼ一致している. 後で述べるように, 実際 $\mathbb{R}^d$ 上に $\frac{d(d+1)}{2}$ 点からなる (locally) 2-distance set を構成できる. つまり, 上の例は次元に対して頂点数が小さい, あまりよくない locally 2-distance set と見ることも出来る. そこで, このような大きな差は, 頂点数の少なさ故に生じてしまったと考え, 次のような問題を本研究のメインテーマとする.

Problem 1. 頂点数が十分大きいとき, proper locally 2-distance set はどのくらいあるか?

第二節で distance set について知られている結果, 特に頂点数の上限や最大値について紹介する. 第三節では, locally 2-distance set に含まれている, よい性質をもつ部分集合である, $(\star)$-property を定義しその性質をしらべる. 第四節で本稿の主結果を述べる. 第五節で今後の研究課題について述べる.

2 頂点数の上限

直感的にも明らかであろうが, 次元 d と距離の種類 k を固定したとき, $\mathbb{R}^d$ 上の (locally) k-distance set という条件の下で, どこまででも頂点を増やしていけるわけではない.

そこで, 与えられた d, k に対して, $\mathbb{R}^d$ 上（または S^{d-1} 上）の (locally) k-distance set の頂点数の最大値を次のように定める.

- $DS_k(d) := \max\{|X| : X \textit{ is a } k\textit{-distance set in } \mathbb{R}^d\}$
- $LDS_k(d) := \max\{|X| : X \textit{ is a locally } k\textit{-distance set in } \mathbb{R}^d\}$
- $DS^*_k(d) := \max\{|X| : X \textit{ is a } k\textit{-distance set in } S^{d-1}\}$
- $LDS^*_k(d) := \max\{|X| : X \textit{ is a locally } k\textit{-distance set in } S^{d-1}\}$

Remark 1. 一般の次元 d に対して, $\binom{d+1}{2}$ 点からなる 2-distance set を構成できる. V_d を $\mathbb{R}^d$ 上の regular simplex の頂点集合, また $\widetilde{V}_d := \{\frac{P+Q}{2} : P, Q \in V_d, P \neq Q\}$ とする. このとき $\widetilde{V}_d$ は $\binom{d+1}{2}$ 点からなる 2-distance set となる. つまり $\binom{d+1}{2} \leq DS_2(d) \leq LDS_2(d)$ という下限が得られる.

最大頂点数を与える (locally) distance set を maximum (locally) distance set と呼ぶ. distance set の頂点数に対しては, Delsarte-Goethals-Seidel[6], 坂内-坂内-Stanton [3], Blokhuis [4] により次の上限が知られている.

Proposition 1.

$$DS^*_k(d) \leq \binom{(d-1)+k}{k} + \binom{(d-1)+k-1}{k-1},$$

$$DS_k(d) \leq \binom{d+k}{k}.$$

$DS_k(1) = k+1$, $DS_1(d) = d+1$ となっていることは容易に確かめられる. つまり $d=1$ または $k=1$ のときには上の上限の等号を満たす場合になっている.

[6] の方法を用いると locally distance set の頂点数の上限も次で与えられる.

Proposition 2.

$$LDS *_k (d) \leq \binom{(d-1)+k}{k} + \binom{(d-1)+k-1}{k-1},$$

$$LDS_k(d) \leq \binom{d+k}{k} + \binom{d+k-1}{k-1}.$$

ここで, $LDS_k(d)$ の上限は, $DS_k(d)$ の上限より大きくなっている. 同じ上限が与えられてもいい気もするが, 今のところ成功していない. $k=1$ の場合はもちろん $DS_1(d) = LDS_1(d)$ となっている. $d=1$ のとき, $LDS_k(1) = k+1$ となっていることも容易に確かめられる. また後で示すように, $k=2$ の場合に関して, locally 2-distance set の頂点数は, distance set に関して知られている上限と同じ値で評価できる.

$d=2$ のとき $k \leq 5$ に対し, また $k=2$ のとき $d \leq 8$ に対し最大値が求められている. (知られている最大値を上の表に記す.) 分類についてはそれぞれ $k \leq 5$, $d \leq 7$ に対しなされている. ([2], [5], [9], [12], [13], [16], [17])

d	1	2	3	4	5	6	7	8
$DS_2(d)$	3	5	6	10	16	27	29	45
$DS_2^*(d)$	2	5	6	10	16	27	28	36

更にごく最近, O. Musing [15] により, $DS_2^*(d)$ の値が $d < 40$ $d \neq 23$ に対し求められた. (この証明では計算機を多く用いている為, その部分は検証できておりませんが.)

3 $(\star)$-property

この節では locally 2-distance set のある性質をもつ部分集合を定義し, その部分集合が持つよい性質を挙げる.

Definition 3.1. X を locally 2-distance set とする. X の部分集合 Y が次の (a), (b) を満たすとき, Y は $(\star)$-property を持つという.
(a) 異なる正の実数 $^\exists\alpha, \beta$ に対し, $A_X(P) = \{\alpha, \beta\}$ $(^\forall P \in Y)$ となっている.
(b) Y は (a) を満たす X の部分集合のうちで最大頂点数を持つ.

Lemma 1. *$X \subset \mathbb{R}^d$ を locally two-distance set, $Y = \{P_1, P_2, \ldots P_m\}$ を X の部分集合で $(\star)$-property を持つものとする. このとき,*
(a) Y は 2-distance set となり, $X \setminus Y$ は locally k-distance set ($k \in \{1,2\}$) となる.
(b) 任意の $Q \in X \setminus Y$ に対し, $Y \cup \{Q\}$ は 2-distance set となる.
(c) $X \setminus Y \subset \{Q \in \mathbb{R}^d : P_1Q = P_2Q = \cdots = P_mQ\}$ $(=: W)$.
(d) $dim(W) = d - dim(Y)$.
(e) Y がある球面上にある $\Longleftrightarrow W \neq \emptyset$.

locally 2-distance set の頂点数の最大値問題や分類問題を考えるとき, (a), (d) より $dim(Y) \geq 1$ なら, X は自身より (真に) 小さい次元を持つ locally 2-distance set を含むことがわかり, 下のクラスの結果に帰着することが可能である. 次の Lemma はそのような Y の存在を保証している.

Lemma 2. *(a) X $(|X| \geq 4)$ を locally 2-distance set とする. このとき, $(\star)$-property を持つような X の部分集合 Y が存在し, $|Y| \geq 2$ となっている. 特に $dim(Y) \geq 1$.*
(b) X $(|X| = n)$ を 2-distance set とする. このとき, $(\star)$-property を持つような X の部

分集合 Y が存在し, $|Y| \geq n-d$ となっている.

4 主結果

4.1 locally 2-distance set の頂点数の上限

Theorem 1. $X \subset \mathbb{R}^d$ を *proper locally 2-distance set* で $|X| \geq 4$ とする. このとき,

$$|X| \leq \max_{1 \leq i \leq d-1} \{DS_2^*(i) + LDS_2(d-i)\} =: f(d).$$

特に, $LDS_d(k) \leq \max\{f(d), DS_2(d)\}$ となっている.

Proof. $(\star)$-property を持つ X の部分集合 Y に対し $i = dim(Y)$ とする. このとき Lemma 2 (a) より $1 \leq i \leq d$, Lemma 1 (d) より $dim(X \setminus Y) \leq d-i$ となっている.

$|X \setminus Y| \leq 1$ とすると Lemma 1 (b) より X は 2-distance set となるので $|X \setminus Y| \geq 2$ としてよい. このとき Lemma 1 (a), (e) より Y は S^{i-1} の 2-distance set となり, $X \setminus Y$ は $\mathbb{R}^{d-i}$ 上の locally k-distance set ($k \in \{1,2\}$) となっている. また $1 \leq i \leq d-1$. よって $|X| = |Y| + |X \setminus Y| \leq DS_2^*(i) + LDS_2(d-i) \leq f(d)$. □

Corollary 1. 少なくとも $\binom{d+1}{2}+3$ (*resp.* $\binom{d+1}{2}+2$) 点以上もつ $\mathbb{R}^d$ (*resp.* S^{d-1}) 上の *locally 2-distance set* は *2-distance set* となる. 特に $LDS_2(d) \leq \binom{d+2}{2}$.

4.2 maximum locally 2-distance set の分類

第二節で 2-distance set について知られている結果についてみた. Theorem 1 を次元の小さなところから順次用いていくと, この結果を locally 2-distance set の場合に拡張できることがわかる.

最大頂点数については, 次の系が成り立つ.

Corollary 2. $d \leq 8$ $(d \neq 3)$ に対し

$$LDS_2^*(d) = DS_2^*(d),$$

$$LDS_2(d) = DS_2(d).$$

また $LDS_2(3) = LDS_2^*(3) = 7$.

Theorem 1 の方法は maximum locally 2-distance set の分類にも応用でき, 次の系も得られる.

Corollary 3. *$d \leq 8$ ($d \notin \{1,3,7\}$) に対し, $\mathbb{R}^d$ 上のすべての maximum locally 2-distance set は 2-distance set になる. また $d = 3, 7$ のとき, (相似を除き) 丁度 4 つの例外が存在する.*

Problem 2. (i) 任意の $d(\neq 3)$ に対し, $DS_2(d) = LDS_2(d)$ となっているだろうか?
(ii) maximum な locally 2-distance set で 2-distance set でないものは, 他に存在するか?

4.3 tight spherical design と tight spherical distance set

第二節でも述べたが 2-distance set の頂点数の上限は次で与えられる.

Remark 2.

- $DS_2(d) \leq \binom{d+2}{2} = \frac{d^2+3d}{2} + 1$.
- $DS_2^*(d) \leq \binom{d+1}{2} + \binom{d}{1} = \frac{d^2+3d}{2} =: T_d$.

Definition 4.1. S^{d-1} (resp. $\mathbb{R}^d$) 上の 2-distance set X が $|X| = T_d$ (resp. $|X| = \binom{d+2}{2}$) となっているとき tight であるという.

tight spherical 4-design と tight spherical 2-distance set (tight spherical 5-design) には次のような関係がある.

Remark 3.

- X は S^{d-1} 上の tight 2-distance set $\Longleftrightarrow$ X は S^{d-1} 上の tight spherical 4-design.
- S^{d-1} 上の tight 5-design が存在する $\Longleftrightarrow$ S^{d-2} 上の tight 4-design が存在する.

S^{d-1} 上の tight spherical 4-design は $d = 2, 6, 22$ の場合にしか知られていない. また tight spherical 4-design が存在する為の d の条件が知られている (坂内-Damerell, 坂内-宗政-Venkov). これらの結果から, (大雑把に言ってしまえば) spherical tight 4-design は滅多に存在しない配置であると言っていいだろう.

4.4 $DS_2(d) < LDS_2(d)$ となるための必要条件

第二節でも述べたが, 最近 O. Musin によって, 球面上の 2-distance set の頂点数の最大値関する, 画期的な結果が示されている. この中で彼は次のことも示している.

Proposition 3. *(Musin, 2008) X を $S^{d-1}(1)$ 上の 2-distance set で $A(X) = \{a, b\}$ とする. $a^2 + b^2 \leq 4$ のとき, $|X| \leq \frac{d(d+1)}{2} = T_d - d$ となる.*

$A'(X) = \{< x, y >: x, y \in X, x \neq y\} = \{\alpha, \beta\}$ とすると, 条件 $a^2 + b^2 \leq 4$ は $\alpha + \beta \geq 0$ と同値である. 例えば X のすべての点がある半球上にのっていれば, この条件を満たす. 直感的には, 2-distance set X の各点が球面上に偏って配置されているとき, その頂点数は $\frac{d(d+1)}{2}$ 点以下となり, 最大頂点数を考える上では無視をしてよいことになる.

Theorem 2. *(a)* $DS_2^*(d) < LDS_2^*(d)$ となっているとき, S^{d-2} 上の *tight* 2-*distance set* が存在する. 特に, そのような *locally* 2-*distance set* は S^{d-1} 上の *tight spherical* 5-*design* の部分集合になっている.
(b) $DS_2(d) < LDS_2(d)$ となっているとき, S^{d-2} 上の *tight two-distance set* が存在する.

Remark 4. 講演の段階では, (b) のステートメントは次のようなものだった.
(b') $DS_2(d) < LDS_2(d)$ となっているとき, 次の (i), (ii) のいずれかが成り立っている.
(i) S^{d-2} 上の tight 2-distance set が存在する.
(ii) $S^{d-2}(1)$ 上の $T_{d-1} - 1$ 点からなる tight 2-distance set で $A(X) = \{1, \frac{2}{\sqrt{3}}\}$ となるものが存在する.
そこで Proposition 3 を用いると, (ii) の可能性を否定することができるという訳である.

Corollary 4.

$$LDS_2^*(d) \leq DS_2^*(d) + 1,$$
$$LDS_2(d) \leq DS_2(d) + 1.$$

5 最後に

ある次元 d に対して, もしも何らかの形で $DS_2^*(d) < LDS_2^*(d)$ $(DS_2(d) < LDS_2(d))$ を示すことができたら, S^{d-2} 上の tight spherical 4-design の存在性を示せたことになる. 正直なところ, tight spherical 4-design の存在を知る前に, このことが示せることに対してはあまり期待はしていない. しかし, 逆に十分大きい d に対して $DS_2^*(d) = LDS_2^*(d)$ $(DS_2(d) = LDS_2(d))$ となっていることが示せれば, tight spherical 4-design があまり存在しないことの, ひとつの理由付けになっているのではないかと思う (これもまた難しい問題だとは思うが).

2-distance set に知られている結果について, $k = 3$ もしくは, 一般の k に対して得ることは, distance set の研究において重要な課題であるが, 多くの場合うまくいっていないというのが現状である. それなら 2-distance set を別な形で一般化して考えてみようというのが, 本研究の一番の動機であった. また 2-distance set の別な形の一般化として任意の 3 点が二等辺三角形を作るような isosceles set も考えられている. (isosceles set に関しては, 城戸君の報告を参考にして下さい.)

2-distance set について知られている結果で, 特に一般化を望まれるものとして Larman-Rogers-Seidel [14] による次の定理が挙げられる.

Proposition 4. X を $\mathbb{R}^d$ 上の 2-*distance set* とする. $|X| > 2d+3$ のとき, 自然数 m ($m \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{m}{2}}$) が存在して, 距離の比は $\sqrt{m} : \sqrt{m-1}$ となる.

現状では $k=3$ のとき, Proposition 4 がどのようなステートメントとして一般化できるのか (もしくはできないのか), はっきりわかっていない. ただ, 多くのよい 3-distance set については, ある自然数 a, b に対して, $\sqrt{a} : \sqrt{b-1} : \sqrt{b}$ という形の距離の比を持っている.

$\mathbb{R}^3$ 上の 3-distance set に関して, 次の結果が得られている (篠原 [18]).

Theorem 3. 三次元ユークリッド空間における 3-*distance set* で 12 点からなるものは, 正二十面体の 12 点に限られる. 特に $DS_3(3) = 12$.

最後に次の問題を提起して本稿の結びとしたい.

Problem 3. 三次元ユークリッド空間における locally 3-distance set で 12 点からなるものは, 正二十面体の 12 点に限られるか? また $LDS_3(3) = 12$ か?

参考文献

1 E. Altman, On a problem of P. Erdős, Amer. Math. Monthly (1963) 148-157.

2 E. Bannai and E. Bannai, 球面上の代数的組合せ理論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.

3 E. Bannai, E. Bannai,and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space, II, Combinatorica 3 (1983), 147-152.

4 A. Blokhuis, Few-distance sets, Ph. D. thesis, Eindhoven Univ. of Technology (1983), (CWI Tract (7) 1984).

5 H. T. Croft, 9-point and 7-point configuration in 3-space, Proc. London. Math. Soc. (3), 12 (1962), 400-424.

6 P. Delsarte, J. -M. Goethals and J. J. Seidel, Spherical codes and designs, Geom. Dedicata 6 (1977), 363-388.

7 S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points I, II, Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A69=Indag. Math. 28 (1966), 479-504.

8 P. Erdős and P. Fishburn, Convex nonagons with five intervertex distance, Geometriae Dedicata 60 (1996) 317-332.

9 P. Erdős and P. Fishburn, Maximum planar sets that determine k distances, Discrete Math, 160 (1996) 115-125.

10 P. Fishburn, Convex polygons with few intervertex distance, Computation Geometry: Theory and Applications 5 (1995) 65-93.

11 P. Fishburn, A remarkable eight point planar configuration, Discrete Math, 252 (2002) 103-122.

12 L. M. Kelly, Elementary Problems and Solutions. Isosceles n-points, Amer. Math. Monthly, 54 (1947), 227-229.

13 P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, J. Comb. Theory, Ser. A77 (1997), 318-338.

14 D. G. Larman, C. A. Rogers and J. J. Seidel, On two-distance sets in Euclidean Space, Bull London Math. Soc. 9 (1977), 261-167.

15 O. R. Musin, On spherical two-distance sets, arXiv:0801.3706v2 [math.MG] 6 Mar 2008.

16 M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, Europ. J. Combinatorics, 25 (2004) 1039-1058.

17 M. Shinohara, Uniqueness of maximum planar five-distance sets, to appear in Discrete Math.

18 M. Shinohara, On three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space, preprint (第24回代数的組合せ論シンポジウム報告集, 32-40).